государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение «Златоустовский индустриальный колледж им. П.П.Аносова»

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ**

для выполнения практических работ

по дисциплине «Математика»

для студентов специальности 23.02.03 «Техническое обслуживание и ремонт автомобильного транспорта»

2015

Методические указания для выполнения практических работ

по дисциплине­­­­­­­­­­­­­­­­­­­­­ «Математика»

для студентов специальности 23.02.03 «Техническое обслуживание и ремонт автомобильного транспорта»

Составитель: Литвинова Ю. Р., преподаватель математики

Рекомендовано к использованию решением методического советаГБПОУ «ЗлатИК им.П.П. Аносова»

протокол № \_\_\_\_ от \_\_\_\_ \_\_\_\_\_\_\_\_ 20\_\_\_\_г.

**Практическая работа № 1**

**Тема:«Производная сложной функции»**

**Цель работы**:

научиться находить производную: а) показательной функции, б) логарифмической функции, в) тригонометрических функций;

–  научиться находить производную сложной функции.

**Произво́дная** (функции в точке) — основное понятие дифференциального исчисления, характеризующее скорость изменения функции (в данной точке). Определяется как **предел отношения** приращения функции к приращению ее аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю, если такой предел существует. Функцию, имеющую конечную производную (в некоторой точке), называют дифференцируемой (в данной точке).

Процесс вычисления производной называется **дифференци́рованием**. Обратный процесс — нахождение первообразной — интегрирование.

### Общепринятые обозначения производной функции в точке



Заметим, что последнее обычно обозначает производную по времени (в теоретической механике).

## Таблица производных

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Производные степенных функций** | **Производные тригонометрических функций** | **Производные обратных тригонометрических функций** |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

## Правила дифференцирования

Операция нахождения производной называется **дифференцированием**. При выполнении этой операции часто приходится работать с частными, суммами, произведениями функций, а также с «функциями функций», то есть сложными функциями. Исходя из определения производной, можно вывести правила дифференцирования, облегчающие эту работу. Если *C* — постоянное число и *f=f(x), g=g(x)* — некоторые дифференцируемые функции, то справедливы следующие *правила дифференцирования:*



* …(g ≠ 0)



* ( g ≠ 0)



**Пример №1.** Найти производную функции .



*Решение.* .



**Пример №2.** Найти производную функции и вычислить ее значения в точках и



*Решение.*



**Пример №3.** Найти производную функции .



*Решение.*



**Пример №4.** Найти производную функции .



*Решение.*



**Задания**

1. **Найдите производные следующих функций:**

;



;



1. **Найдите производные следующих функций:**

;



;



;



;



1. **Вычислите значение производной:**

;



;



1. **Вычислите значение производной:**

;



1. **Найдите производную следующих функций:**



1. **Найдите производные следующих функций:**

;



1. **Найдите производные следующих функций:**

;



1. **Найдите производные следующих функций:**

;



;



.



**Практическая работа №2**

**Тема:«Выпуклость, вогнутость, перегиб функции»**

**Цель:** изучить понятия: выпуклость функции, вогнутость функции, промежутки выпуклости и вогнутости функции, точки перегиба;

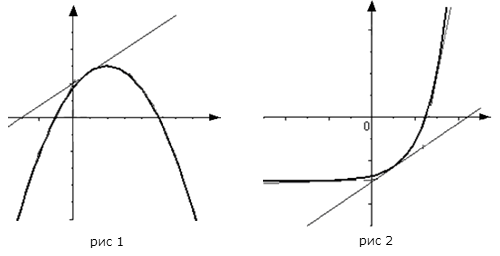
закрепление практических навыков решения задач с применением второй производной

Выпуклость функции, точки перегиба

График функции , дифференцируемой на интервале , является на этом интервале **выпуклым**, если график этой функции в пределах интервала  лежит не выше любой своей касательной (рис. 1).



График функции , дифференцируемой на интервале , является на этом интервале **вогнутым**, если график этой функции в пределах интервала  лежит не ниже любой своей касательной (рис. 2).



**Теоремы о выпуклости функции и точках перегиба**

**(Об условиях выпуклости или вогнутости графика функции)**

Пусть функция  определена на интервале  и имеет непрерывную, не равную нулю в точке вторую производную. Тогда, если  всюду на интервале , то функция имеет **вогнутость на этом интервале**, если , то функция имеет **выпуклость**.**ОТочкой перегиба** графика функции  называется точка , разделяющая промежутки выпуклости и вогнутости.



**(О необходимом условии существования точки перегиба)**

Если функция  имеет перегиб в точке , то  или не существует.



**(О достаточном условии существования точки перегиба)**

Если:

1.первая производная  [непрерывна в окрестности точки](http://www.webmath.ru/poleznoe/formules_7_21.php) ;



2.вторая производная  или не существует в точке ;



3. при переходе через точку  меняет свой знак,тогда в точке  функция  имеет перегиб.



**Схема исследования функции на выпуклость, вогнутость**

1.Найти вторую производную функции.

2.Найти точки, в которых вторая производная равна нулю или не существует.

3.Исследовать знак производной слева и справа от каждой найденной точки и сделать вывод об интервалах выпуклости и точках перегиба.

**Задание.** Найти интервалы выпуклости/вогнутости функции



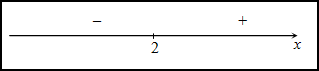
**Решение.** Найдем вторую производную заданной функции:



Находим точки, в которых вторая производная равна нулю, для этого решаем уравнение :



Исследуем знак второй производной слева и справа от полученной точки:



Так как на промежутке  вторая производная , то на этом промежутке функция выпукла; в силу того, что на промежутке  вторая производная  - функция вогнута. Так как при переходе через точку  вторая производная сменила знак, то эта точка является точкой перегиба графика функции.



**Ответ.** Точка  - точка перегиба графика функции.



На промежутке  функция выпукла, на промежутке  функция вогнута.



**ЗАДАНИЕ 1.** Исследование функции на выпуклость и точки перегиба.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **1.1** |  | **1.6** |  | **1.11** |  |
| **1.2** |  | **1.7** |  | **1.12** |  |
| **1.3** |  | **1.8** |  | **1.13** |  |
| **1.4** |  | **1.9** |  | **1.14** |  |
| **1.5** |  | **1.10** |  | **1.15** |  |

**Практическая работа № 3**

**Тема:«Асимптоты функции»**

**Цель:**изучение понятия асимптоты функции; научиться находить асимптоты функции

**Виды асимптот**

Прямая  называется вертикальной асимптотой графика функции , если хотя бы одно из предельных значений  или  равно  или  .



Замечание. Прямая  не может быть вертикальной асимптотой, если функция [непрерывна в точке](http://www.webmath.ru/poleznoe/formules_7_21.php)  . Поэтому вертикальные асимптоты следует искать в точках разрыва функции.Опреление



Прямая  называется горизонтальной асимптотой графика функции , если хотя бы одно из предельных значений  или  равно  .



**Замечание.** График функции может иметь только правую горизонтальную асимптоту или только левую. Прямая  называется **наклонной асимптотой** графика **функции , если**



**Нахождение наклонной асимптоты**

**Теорема**(условиях существования наклонной асимптоты)

Если для функции  существуют пределы  и , то функция имеет наклонную асимптоту  при  .



**е**Горизонтальная асимптота является частным случаем наклонной при  .



Если при нахождении горизонтальной асимптоты получается, что , то функция может иметь наклонную асимптоту.



**Замечание**

Кривая  может пересекать свою асимптоту, причем неоднократно.



**Задание.** Найти асимптоты графика функции



**Решение.** Область определения функции:



а) вертикальные асимптоты: прямая  - вертикальная асимптота, так как



б) горизонтальные асимптоты: находим [предел функции на бесконечности](http://www.webmath.ru/poleznoe/formules_7_11.php):



то есть, горизонтальных асимптот нет.

в) наклонные асимптоты :



Таким образом, наклонная асимптота:  .



**Ответ.** Вертикальная асимптота - прямая  .



Наклонная асимптота - прямая  .



**Вариант 1**

Найти асимптоты кривой:

**Вариант 6:**





**Вариант 2**

**Вариант 8**

Найти асимптоты кривой:





**Вариант 3**

**Вариант 9**

Найти асимптоты кривой:





**Вариант 4**

Найти асимптоты кривой:



**Вариант 5**



**Практическое занятие №4**

**Тема: Исследование функции по схеме**

**Цель:** Овладеть навыками исследования и построения графика функций в точке

**Указания:**

Схема исследования функции:

1. Найти область определения функции



1. Исследовать функцию на четность и нечетность
2. Исследовать функцию на пересечение с осями



1. Исследовать на непрерывность, найти точки разрыва
2. Найти критические точки первого рода
3. Найти интервалы монотонности и экстремумы
4. Найти критические точки второго рода
5. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба
6. Найти асимптоты графика функции
7. Найти дополнительные точки (при необходимости)
8. Построить график функции.

Например: Построить график функции.



1. ункцияя непериодическая.



1. Точки точки разрыва.







Критические точки 1 рода:



.







+

+

-

-

-

-



Функция возрастает на



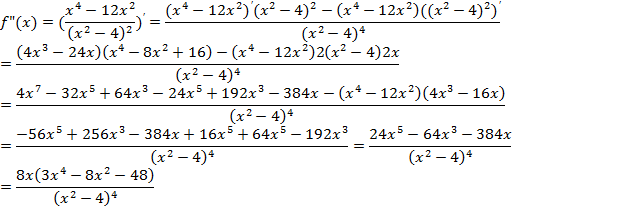
Функция убывает на



Точка max



Точка min



x=0 – критическая точка 2 рода.

не сушествует при



– точки разрыва 2 рода.

-

+

-

+







Функция выпукла на



Функция вогнута на



они не являются крит. точками 2-ого рода.



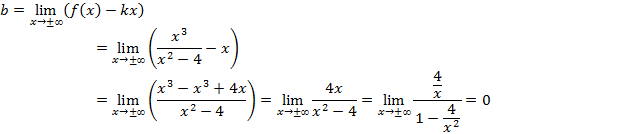
– точка перегиба.







и – вертикальная асимптота.



– наклонная асимптота.



x

y

1

0

**Задание: Исследовать функцию и построить график:**

**Вариант 1** 

**Вариант2 **

**Вариант 3** 

**Вариант 4** 

**Вариант 5** 

**Вариант 6** 

**Практическая работа № 5**

**«Метод замены переменной »**

**Цель работы:** совершенствование умений находить неопределенные интегралы методом замены переменной и по частям, совершенствование умений проверять действие интегрирования дифференцированием.

**Первообразная функции. Неопределенный интеграл**

Функция , определенная на интервале , называется *первообразной* для функции , определенной на том же интервале , если 

Если  — первообразная для функции , то любая другая первообразная для функции  отличается от  на некоторое постоянное слагаемое, т. е.  где .

*Неопределенным интегралом* от функции  называется совокупность всех первообразных для этой функции. Обозначается неопределенный интеграл:  где 

Операция нахождений первообразной для данной функции называется *интегрированием*. Интегрирование является обратной операцией к дифференцированию:



Для проверки правильности выполненного интегрирования необходимо продифференцировать результат интегрирования и сравнить полученную функцию с подынтегральной.

Свойства неопределенного интеграла:

1. 

2. 

3. 

4. 

***Таблица основных интегралов***

1.  2. 

3.  

4.  5. 

6.  7.

8.  9. 

10.  11. 

Каждая из приведенных в таблице формул справедлива на промежутке, не содержащем точек разрыва подынтегральной функции. Вычисление интегралов с использованием таблицы и основных свойств называют непосредственным интегрированием.

**Метод замены переменной**

*Теорема 1.* Пусть монотонная, непрерывно дифференцируемая функция, тогда

 (1)

При этом, если  то  где — функция, обратная .

Формула (1) называется *формулой замены переменной* в неопределенном интеграле.

*Алгоритм замены переменной:*

1) Связать старую переменную интегрирования  с новой переменной  с помощью замены .

2) Найти связь между дифференциалами .

3) Перейти под знаком интеграла к новой переменной.

4) Проинтегрировать и в полученной первообразной вернуться к старой переменной, подставив 

*Пример1.* Проинтегрировать подходящей заменой переменной.

**  **

*Решение:*







**Задание 1**. Проинтегрировать функции заменой переменной:

1)   

2)   

3)   

4)   

5)   

6)   

**Практическая работа №6**

**"Вычисление неопределенного интеграла"**

**Цель работы**: закрепление практических навыков нахождения неопределённых интегралов.

Функция *у* = *F*(*x*) называется ***первообразной*** для функции *у* = *f*(*x*) на некотором промежутке, если для всех *х* из этого промежутка выполняется условие .

**Основное свойство первообразной:** Если *y* = *F*(*x*) – первообразная для функции *f*(*x*) на некотором промежутке, то *у* функции *f*(*x*) бесконечно много первообразных, и все эти первообразные имеют вид *y* = *F*(*x*) + *С*.

Множества функций *F*(*x*) + *С* всех первообразных для функции *f*(*x*) называется ***неопределенным интегралом*** и обозначается так: .

***Интегрирование*** – это действие нахождения (*восстановления*) функции по заданной производной или дифференциалу.

**Свойства неопределенных интегралов:**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *1)* |  | *3)* |  |
| *2)* | *,*  *где k –const* | *4)* |  |

**Таблица интегралов:**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **1** | , С - const | | **2** |  |
| **3** |  | | **4** |  |
| **5** |  | a > 0  a 1 | **6** |  |
| **7** |  | | **8** |  |
| **9** |  | | **10** |  |
| **11** |  | | **12** |  |
| **13** |  | | **14** |  |

**Свойства определенных интегралов:**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| ***1)*** |  | ***2)*** |  |
| ***3)*** |  | ***4)*** |  |
| ***5)*** | *, где a <* ***c*** *< b* | | |

**Примеры**

1) 

2)

3)



**Задание 1*.*** Вычисление неопределенных интегралов непосредственным методом.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ***1.1*** | ***а)*** |  | ***б)*** |  | ***в)*** |  |
| ***1.2*** | ***а)*** |  | ***б)*** |  | ***в)*** |  |
| ***1.3*** | ***а)*** |  | ***б)*** |  | ***в)*** |  |
| ***1.4*** | ***а)*** |  | ***б)*** |  | ***в)*** |  |
| ***1.5*** | ***а)*** |  | ***б)*** |  | ***в)*** |  |
| ***1.6*** | ***а)*** |  | ***б)*** |  | ***в)*** |  |
| ***1.7*** | ***а)*** |  | ***б)*** |  | ***в)*** |  |
| ***1.8*** | ***а)*** |  | ***б)*** |  | ***в)*** |  |
| ***1.9*** | ***а)*** |  | ***б)*** |  | ***в)*** |  |
| ***1.10*** | ***а)*** |  | ***б)*** |  | ***в)*** |  |

**Практическая работа №7**

**Тема"Определенный интеграл. Его вычисление"**

**Цель работы**: закрепление практических навыков вычисления определённых интегралов

**Указания:**

**Определение:** Определенный интеграл вычисляется по формуле Ньютона-Лейбница:

= F(a)-F(b)



- соответственно верхний и нижний пределы интегрирования, они пишутся и читаются снизу вверх, а в формулу подставляются сверху вниз!)



**Основные свойства определенного интеграла:**

1. При перестановке пределов интегрирования изменяется знак интеграла:



1. Определенный интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме их определенных интегралов
2. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла

**Порядок вычисления определённого интеграла:**

1. Найти неопределённый интеграл от данной функции;
2. В полученную первообразную подставить вместо аргумента сначала верхний, затем нижний предел интеграла;
3. Из результата подстановки верхнего предела вычесть результат подстановки нижнего предела.

Пример 1. Вычислить интеграл



Решение: Применив указанное правило, вычислим данный определённый интеграл:



**Задание:** Найти значение определенного интеграла

|  |  |
| --- | --- |
| Вариант 1 | Вариант 2 |
| 3  4 | 2  3  4 |

**Практическая работа № 8**

**Тема «Применение определенного интеграла к решению задач »**

**Цель работы**: закрепление практических навыков решения задач с помощью определённого интеграла

**Задача о вычислении пути**

Согласно физическому смыслу первой производной, производная функции в точке есть мгновенная скорость точки, т.е. . Отсюда, . Интегрируя полученное равенство в пределах от t1 до t2получаем



Тогда путь, пройденный точкой при неравномерном движении по прямой с переменной скоростью (е) за отрезок времени []выражается интегралом



                          (1)



**Пример 1.** Скорость прямолинейного движения тела выражается формулой  = 2t+3t2(м/с). Найти путь, пройденный телом за 5 секунд от начала движения.



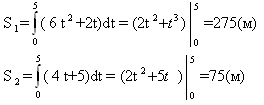
Решение.



**Пример 2.** Два тела начали двигаться одновременно из одной точки в одном направлении по прямой. Первое тело движется со скоростью v=(6t2+2t) м/с, второе – со скоростью v2=(4t+5) м/с. На каком расстояния друг от друга они окажутся через 5 с?



Решение. Искомая величина есть разность расстояний, пройденных телами за 5 с.



Таким образом, S=S1-S2= 275-75=200 (м).

**2. Задача о** **вычислении работы переменной силы**

Пусть материальная точка под действием силы F движется по прямой. Если действующая сила постояна, а пройденный путь равен s, то как известно из курса физики, работа А этой F вычисляется по формуле:

А= F\*s

Работу переменной силы f(x) при перемещении по оси Оx материальной точки от x=a до x=b, находим по формуле (3):

A= (2)



Решении задач на вычисление работы силы упругости, связанных с растяжением и сжатием пружин, основывается на законе Гука. По закону Гука сила F, растягивающая или сжимающая пружину, пропорциональная этому растяжению или сжатию, т.е. F=kx, где x – величина растяжения или сжатия, k – коэффициент пропорциональности.

**Пример 1.**Сила упругости F пружины, растянутой на 11 = 0,05 м, равна 3H. Какую работу надо произвести, чтобы растянуть пружину на 12 =0,1 м?

Решение. Подставив данные в формулу закона Гука, получим: 3=k\*0.05, т.е. k=60, следовательно, сила упругости выражается соотношением F=60x. Найдем работу переменной силы по формуле (2), полагая, что а=0; b=0,1:

A==0,3Дж



**3. Задача о силе давления жидкости**

Согласно закону Паскаля величина P давления жидкости на горизонтальную площадку вычисляется по формуле P=gphS, (4)

Где g – ускорение свободного падения в м/с2;

p– плотность жидкости в кг/м3;

h – глубина погружения площадки в м;

S – площадь площадки в м2.

По этой формуле нельзя искать давление жидкости на вертикально погруженную пластинку, так как ее разные точки лежат на разных глубинах.

Пусть в жидкость погружена вертикально пластина, ограниченная линиями х = а, х = b, у1 = f1(x) и у2=f2(х).

Для решения задачи разобьем пластину на n частей (малых горизонт альных полосок) прямыми, параллельными поверхности жидкости (т.е. параллельными оси OY). На глубине х выделим одну из них и обозначим через f(x) ее длину, а через  ее ширину. Приняв полоску за прямоугольник, находим ее площадь .



Найдем дифференциал dp этой функции.



Тогда по закону Паскаля интегрируя полученное равенство в пределах от х = а до х = b, получим

P=g  (3)



**Пример**

Аквариум имеет форму прямоугольного параллелепипеда. Найдем силу давления воды (плотность воды 1000 кг/м3), наполняющей аквариум, на одну из его вертикальных стенок, размеры которой 0,4 м x 0,7 м.

Решение. Выберем систему координат так, чтобы оси Оy и Оx соответственно содержали верхнее основание и боковую сторону вертикальной стенки аквариума. Для нахождения силы давления воды на стенку воспользуемся формулой (3). Стенка имеет форму прямоугольника, поэтому  Так как пределы интегрирования а=0 и b=0,4, то получим:



**2. Выполнить самостоятельно:**

**Вариант 1.**

1.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями у = 4 – х2  и у = - 5. Сделать чертёж.

2.Скорость движения точки v = 18t – 3t2  м/с. Найдите путь, пройденный точкой от начала движения до её остановки.

3.Пружина в спокойном состоянии имеет длину 0,1 м. Сила в 20 Н растягивает её на 0,01 м. Какую работу надо совершить, чтобы растянуть её от 0,12 до 0,14 м?

**Вариант 2.**

1.Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями у = х2  - 4х и у = 0. Сделать чертёж.

2.Тело брошено с поверхности земли вертикально вверх со скоростью v = 29,4 – 9,8t м/с. Найдите наибольшую высоту подъёма тела.

3.При сжатии пружины на 0,05 м совершается работа 30 Дж. Какую работу необходимо совершить, чтобы сжать пружину на 0,08 м?

**Практическая работа № 9**

**Тема: «Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными»**

**Цель работы**: закрепление решений дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными

**Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными**

Дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными называется уравнение вида: y'=f(x)g(y) или через дифференциалы , где f(x)  и g(y)– заданные функции.



Для тех y, для которых , уравнение y'=f(x)g(y) равносильно уравнению, в котором переменная y присутствует лишь в левой части, а переменная x- лишь в правой части. Говорят, «в уравнении y'=f(x)g(y разделим переменные».



Уравнение вида  называется уравнением с разделёнными переменными.



Проинтегрировав обе части уравнения  по x, получим G(y) = F(x) + C– общее решение уравнения, где G(y) и F(x) – некоторые первообразные соответственно функций  и f(x), C произвольная постоянная.



**Алгоритм решения дифференциального уравнения первого порядка с разделяющимися переменными**

Производную функции переписать через её дифференциалы



Разделить переменные.

Проинтегрировать обе части равенства, найти общее решение.

Если заданы начальные условия, найти частное решение.

Пример 1

Решить уравнение y' = xy

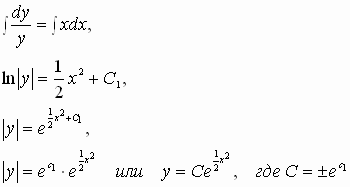
Решение. Производную функции y' заменим на



разделим переменные



проинтегрируем обе части равенства:



Ответ:



Пример 2

Найти частное решение уравнения

2yy' = 1- 3x2, если y0 = 3 при x0 = 1

Это—уравнение с разделенными переменными. Представим его в дифференциалах. Для этого перепишем данное уравнение в виде  Отсюда



Интегрируя обе части последнего равенства, найдем



Подставив начальные значения x0 = 1, y0 = 3 найдем С 9=1-1+C, т.е. С = 9.

Следовательно, искомый частный интеграл будет  или



Пример 3

Составить уравнение кривой, проходящей через точку M(2;-3) и имеющей касательную с угловым коэффициентом



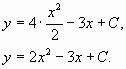
Решение. Согласно условию



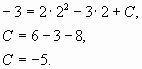
Это уравнение с разделяющимися переменными. Разделив переменные, получим:



 Проинтегрировав обе части уравнения, получим:



Используя начальные условия, x = 2  и y = - 3 найдем C:



Следовательно, искомое уравнение имеет вид



**Задание**

**Вариант 1 Вариант 2**

**Доказать, что для данных дифференциальных уравнений указанные функции являются решениями при любом значении С, и найти частные решения, удовлетворяющие заданным начальным условиям.**

**, ,  **

**Практическая работа № 10**

**Тема: «Дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами с постоянными коэффициентами»**

*Линейными дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида*

, (1)

*где p и q – постоянные величины, а - непрерывная функция x.*

Правая часть уравнения(1) вместо функции может содержать нуль; в этом случае получим уравнение

, (2)

называемое *однородным.* Уравнение (1) называется *неоднородным*.

Разберем три случая решения уравнения (2).

Первый случай. Корни характеристического уравнения действительные и разные по величине. Следовательно, уравнение (2) имеет два линейно независимых частных решения:  и , а потому его общим решением будет

.

Пример 1. Решение уравнения .

Решение. Частными решениями этого уравнения мы уже пользовались; теперь покажем, как они находятся. Составляем характеристическое уравнение

,

откуда

 и .

Таким образом, линейно независимыми частными решениями для данного уравнения будут

 и ,

а его общее решение напишется так:

.

Второй случай. Корни характеристического уравнения действительные и равные, т.е. . Находим одно частное решение:

.

Можно доказать, что вторым частным решением будет

.

Пример 2. Решить уравнение .

Решение. Решая характеристическое уравнение

,

находим:

.

Одно частное решение , а другое .

Третий случай. Корни характеристического уравнения комплексные, а именно:

 и .

Частными решениями уравнения (2) будут

 и .

**Задание**: Найти общие решения уравнений:

1) y''-y=0, 2) y'' =4y, 3)y'' - 4y' +3y=0,

4) y'' +y' -2y = 0, 5) y'' - 2y' +y =0,

6) y'' - 6y'+ 9y = 0, 7) y'' –y' + y = 0,

8) y'' +2y' +2y = 0, 9) y'' +4y' +8y = 0,

10) y'' +y =0, 11) y'' +16y =0.

**Практическая работа № 11, №12**

**Тема«Дифференциальные уравнения первого и второго порядка»**

**Цель**: Проверить на практике знание понятия дифференциального уравнения, виды дифференциальных уравнений, умение решать дифференциальные уравнения I и II –го порядков, находить общее и частное решение.

**Теоретический материал и примеры решения дифференциальных уравнений.**

**1. Дифференциальное уравнение** *первого порядка*, **содержит**:   
1) независимую переменную ;  
2) зависимую переменную  (функцию);  
3) первую производную функции: .



Решить дифференциальное уравнение – это значит, найти **множество функций**, которые удовлетворяют данному уравнению. Такое множество функций называется **общим решением дифференциального уравнения**.



**Пример 1**

Решить дифференциальное уравнение



 .



В рассматриваемом примере переменные легко разделяются перекидыванием множителей по правилу пропорции:



Переменные разделены. В левой части – только «игреки», в правой части – только «иксы».

Следующий этап – **интегрирование дифференциального уравнения.**Интегрируем обе части:  
   
  
Решение дифференциального уравнения в неявном виде называется **общим интегралом дифференциального уравнения**. То есть,  – это общий интеграл.



**Вместо**записи  обычно пишут .



В данном случае:



Функция представлена в явном виде. Это и есть общее решение.

Множество функций  является общим решением дифференциального уравнения .



Придавая константе  различные значения, можно получить бесконечно много **частных решений** дифференциального уравнения.



**Пример 2**

Найти частное решение дифференциального уравнения , удовлетворяющее начальному условию



По условию требуется найти **частное решение** ДУ, удовлетворяющее начальному условию. Такая постановка вопроса также называется *задачей Коши*.

Сначала находим общее решение.



Интегрируем уравнение:



Итак, общее решение: . На завершающем этапе нужно найти частное решение, удовлетворяющее заданному начальному условию .



Необходимо подобрать **такое** значение константы , чтобы выполнялось заданное начальное условие .



В общее решение вместо «икса» подставляем ноль, а вместо «игрека» двойку:



В общее решение  подставляем найденное значение константы :  
 – это и есть нужное нам частное решение.



**Пример 3**

Решить дифференциальное уравнение



**Решение:** Переписываем производную в нужном нам виде:



Переносим второе слагаемое в правую часть со сменой знака:



Переменные разделены, интегрируем обе части:



Решение распишу очень подробно:



**Ответ:** общий интеграл:

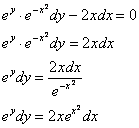


***Примечание:***общий интеграл любого уравнения можно записать не единственным способом. Таким образом, если у вас не совпал результат с заранее известным ответом, то это еще не значит, что вы неправильно решили уравнение.

**Пример 4.** Найти частное решение дифференциального уравнения , удовлетворяющее начальному условию . Выполнить проверку.



**Решение:**Сначала найдем общее решение.Данное уравнение уже содержит готовые дифференциалы  и , а значит, решение упрощается. Разделяем переменные:



Интегрируем уравнение:



общее решение:



Найдем частное решение, соответствующее заданному начальному условию 



Подставляем найденное значение константы  в общее решение.



**Ответ:** частное решение:



**2.Линейные дифференциальные уравнения второго порядка   
с постоянными коэффициентами**

В теории  и практике различают два типа таких уравнений – **однородное уравнение** и **неоднородное уравнение**.

**Однородное ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами** имеет следующий вид:

, где  и  – константы (числа), а в правой части – **строго** ноль.



[**Неоднородное ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами**](http://infourok.ru/go.html?href=http%3A%2F%2Fwww.mathprofi.ru%2Fkak_reshit_neodnorodnoe_uravnenie_vtorogo_poryadka.html)имеет вид:  
, где  и  – константы, а  – функция, зависящая *только от «икс»*. В простейшем случае функция  может быть числом, *отличным от нуля*.



Какая мысль приходит в голову после беглого взгляда? Неоднородное уравнение кажется сложнее. На этот раз первое впечатление не подводит!

Кроме того, чтобы научиться решать неоднородные уравнения **необходимо** уметь решать однородные уравнения. По этой причине сначала рассмотрим алгоритм решения линейного однородного уравнения второго порядка:



Для того чтобы решить данное ДУ, нужно составить так называемое *характеристическое уравнение*:



По какому принципу составлено характеристическое уравнение, отчётливо видно:   
вместо второй производной записываем ;  
вместо первой производной записываем просто «лямбду»;  
вместо функции  ничего не записываем.



 – это **обычное квадратное уравнение**, которое предстоит решить.



Существуют три варианта развития событий.   
Они доказаны в курсе математического анализа, и на практике мы будет использовать готовые формулы.

**Характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня**

Если характеристическое уравнение  имеет два **различных** действительных корня ,  (т.е., если дискриминант ), то общее решение однородного уравнения выглядит так:   
, где  – константы.



В случае если один из корней равен нулю, решение очевидным образом упрощается; пусть, например, , тогда общее решение:



**Пример 5**

Решить дифференциальное уравнение



**Решение:** составим и решим характеристическое уравнение:



,



**Ответ:** общее решение:



**Характеристическое уравнение имеет два кратных действительных корня**

Если характеристическое уравнение  имеет два **кратных** (совпавших) действительных корня  (дискриминант ), то общее решение однородного уравнения принимает вид:   
, где  – константы.   
Вместо  в формуле можно было нарисовать , корни всё равно одинаковы.



Если оба корня равны нулю , то общее решение опять же упрощается: . Кстати,  является общим решением того самого примитивного уравнения , о котором я упоминал в начале урока. Почему? Составим характеристическое уравнение:  – действительно, данное уравнение как раз и имеет совпавшие нулевые корни .



**Пример 6**

Решить дифференциальное уравнение



**Решение:** составим и решим характеристическое уравнение:  
  
Здесь можно вычислить дискриминант, получить ноль и найти кратные корни. Но можно невозбранно применить известную школьную формулу сокращенного умножения:  
  
Получены два кратных действительных корня



**Ответ:** общее решение:



**Характеристическое уравнение имеет сопряженные комплексные корни**

Если характеристическое уравнение  имеет **сопряженные** комплексные корни ,  (дискриминант ), то общее решение однородного уравнения принимает вид:   
, где  – константы.  
*Примечание: Сопряженные комплексные корни почти всегда записывают кратко следующим образом:*



Если получаются *чисто мнимые* сопряженные комплексные корни: , то общее решение упрощается:



**Пример 7**

Решить однородное дифференциальное уравнение второго порядка



**Решение:** Составим и решим характеристическое уравнение:  
  
  
 – получены сопряженные комплексные корни



**Ответ:** общее решение:



**Пример 8**

Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям , 



**Решение:** составим и решим характеристическое уравнение:  
  
,   
Получены два различных действительных корня, поэтому общее решение:



Алгоритм нахождения частного решения следующий:

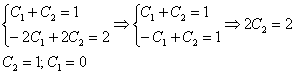
Сначала используем начальное условие :  
  
Согласно начальному условию, получаем первое уравнение:  или просто



Далее берём наше общее решение  и находим производную:  
  
Используем второе начальное условие :  
  
Согласно второму начальному условию, получаем второе уравнение:  или просто



Составим и решим систему из двух найденных уравнений:



Подставим найденные значения констант  в общее решение :



**Ответ:** частное решение:



***Практическое задание:***  
**Вариант 1**

1. Найти общее решение дифференциального уравнения к разделяющимися переменными.



2. Найти частное решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.



3.Найти решение однородного дифференциального уравнения первого порядка.



4. Найти общее решение дифференциального уравнения 2-го порядка.



5. Найти частное решение дифференциального уравнения 2-го порядка.



**Вариант 2**

1. Найти общее решение дифференциального уравнения c разделяющимися переменными.



2. Найти частное решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.



3.Найти решение однородного дифференциального уравнения первого порядка.



4. Найти общее решение дифференциального уравнения 2-го порядка.



5. Найти частное решение дифференциального уравнения 2-го порядка.



**Вариант 3**

1. Найти общее решение дифференциального уравнения c разделяющимися переменными.



2. Найти частное решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.



3.Найти решение однородного дифференциального уравнения первого порядка.



4. Найти общее решение дифференциального уравнения 2-го порядка.



5. Найти частное решение дифференциального уравнения 2-го порядка.



**Вариант 4**

1. Найти общее решение дифференциального уравнения c разделяющимися переменными.



2. Найти частное решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.



3.Найти решение однородного дифференциального уравнения первого порядка.



4. Найти общее решение дифференциального уравнения 2-го порядка.



5. Найти частное решение дифференциального уравнения 2-го порядка.



**Практическое занятие №13**

**Тема: Операции над событиями. Формула полной вероятности**

**Цель:** закрепление практических навыков решения простейших задач на определение вероятности события, действий над событиями

**Указания:**

**Событие** – это факт, который при осуществлении определенных условий может произойти или нет. События обозначаются большими буквами латинского алфавита *А, В,С...*

**Случайным** называется событие, которое может произойти или может не произойти **Достоверное событие** – это событие, которое в результате испытания непременно должно произойти.

**Невозможное событие** – это событие, которое в результате испытания не может произойти.

**Случайное событие** – это событие, которое при испытаниях может произойти или не может произойти.

События называются **несовместными**, если в результате данного испытания появление одного из них исключает появление другого.

События называются **совместными**, если в результате данного испытания появление одного из них не исключает появление другого.

События называются **равновозможными**, если нет оснований считать, что одно из них происходит чаще, чем другое.

События образуют **полную группу** событий, если в результате испытания обязательно произойдет хотя бы одно из них и любые два из них несовместны.

Два несовместных события *А* и *Ā* (читается «не *А*») называются **противоположенными,** если в результате испытания одно из них должно обязательно произойти.

**Операции над событиями**

**Суммой**нескольких событий называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из них в результате испытания.

**Произведением** нескольких событий называется событие, которое состоит в совместном наступлении всех этих событий в результате испытания.

**Классическое определение вероятности:** Вероятностью Р(А) ( события А называется отношение числа благоприятствующих исходов **m** к общему числу равновозможных несовместных исходов **n**: **Р(А)=m/n**

**Суммой**нескольких событий называется событие, состоящее в появлении хотя бы одного из этих событий.

**Произведением** нескольких событий называется событие, состоя­щее в совместном осуществлении всех этих событий

**Теоремы сложения вероятностей**

1.Вероятность суммы двух несовместных событий А и В равна сумме вероятностей этих событий:Р(А+В)=Р(А)+Р(В).

2.Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного наступления, т.е. Р(А+В)=Р(А)+Р(В)-Р(А\*В).

**Теорема умножения вероятностей**

Вероятность произведения 2 независимых событий А и В равна произведению вероятностей этих событий: Р(А\*В)=Р(А)\*Р(В)

Пример 1 Найти вероятность выпадения цифры 2 или 3 при бросании игральной кости

Решение: Событие А – выпадение цифры 2, вероятность этого события Р(А)=1/6. Событие В – выпадение цифры 3, вероятность этого события Р(В)=1/6. События несовместные, поэтому  
Р(А+В)=Р(А)+Р(В)=1/6+1/6=2/6=1/3.

Пример 2 Получена партия одежды в количестве 40 штук. Из низ 20 комплектов мужской одежды, 6 – женской и14 – детской. Найти вероятность того, что взятая наугад одежда окажется не женской.

Решение:

Событие А – одежда мужская, вероятность Р(А)=20/40=1/2  
Событие В – одежда женская, Р(В)=6/40=3/20  
Событие С –одежда детская, Р(С)=14/40=7/20.  
Тогда Р(А+С)=Р(А)+Р(С)=1/2+7/20=17/20.  
В этом случае, если события А и В являются совместными, то справедлива следующая теорема.

Пример 3Вероятность попадания в мишень одного стрелка равна 0,65, а второго 0,6. Определить вероятность поражения мишени при одновременных выстрелах двух стрелков.  
Решение: Так как при стрельбе возможно попадание в мишень двумя стрелками, то эти события совместные, следовательно

Р(А+В)= Р(А)+Р(В)-Р(А\*В)=0,65+0,6-0,39=0,86.

Пример 4 В урне находятся 10 шаров: 3 белых и 7 черных. Первым был вынут черный шар, найти вероятность того, что второй шар будет черным.

Решение: Вероятность появления черного шара первый раз (событие В) равно Р(В)=3/10; а вероятность появления его второй раз (событие А), при условии, что событие В произошло, равно Р(А/В)=2/9, т.к. в урне осталось 9 шаров, из них 2 черных.

Рассмотрим закон умножения вероятностей для независимых событий.

Произведением двух событий А и В называют событие С=А\*В, состоящее в совместном осуществлении этих событий.

Пример 5В билете 3 раздела. Из 40 вопросов первого раздела студент знает 30 вопросов, из 30 вопросов – 15, из 30 вопросов третьего – 10. Определить вероятность правильного ответа студента по билету.

Решение: Учитывая, что ответ на каждые разделы есть независимые события А1, А2, и А3,а их вероятности соответственно равны:

Р(А1)=30/40=3/4; Р(А2)=15/30=1/2; Р(А3)=10/30=1/3.

Тогда вероятность правильного ответа на билет Р(В), можно найти по формуле

Р(В)= Р(А1)\*Р(А2)\*Р(А3)=3/4\*1/2\*1/3=1/8=0,125.

**Задание:**

**Вариант 1**

1). Из партии, в которой 4 стандартные и 7 бракованных деталей, случайным образом вынимают 4 детали. Найти вероятность, что среди них имеются:

а) 2 стандартные детали; б) хотя бы 1 деталь стандартная.

2)Двум студентам предложена задача. Вероятность того, что её решит 1-й студент равна 0,72, что решит 2-й – 0,65. Найти вероятность того, что задачу решат оба студента; что решит только один?

3) В пирамиде 7 винтовок, из них 3 с оптическим прицелом. Вероятность поражения цели простой винтовкой 0, 58, а с оптическим прицелом 0, 93. Найти вероятность того, что стрелок поразит цель, стреляя случайно взятой винтовкой.

**Вариант 2**

1). Из корзины, в которой 8 красных и 5 синих и 3 белых шара, случайным образом вынимают 2 шара. Найти вероятность, что они: а) оба красные; б) хотя бы 1 красный.

2) Два стрелка независимо друг от друга производят выстрел по мишени. Вероятность попадания 1-м - 0,8, 2-м – 0,9. Какова вероятность, что после одного выстрела в мишени будет только одна пробоина?

3) В первом ящике содержится 20 деталей, из них 15 стандартных. Во втором ящике 30 деталей, из них 24 стандартные. А в третьем – 10 деталей, из них 6 стандартные. Найти вероятность того, что наудачу извлеченная деталь из наудачу взятого ящика – стандартная.

**Практическое занятие №14.№15**

**Тема:**  **Формула Байеса, Бернулли**

**Математическое ожидание, дисперсия**

**Основные понятия**

**Определение. Событием**называется всякий факт, который может произойти или не произойти в результате опыта.

При этом тот или иной результат опыта может быть получен с различной степенью возможности. Т.е. в некоторых случаях можно сказать, что одно событие произойдет практически наверняка, другое практически никогда. В отношении друг друга события также имеют особенности, т.е. в одном случае событие А может произойти совместно с событием В, в другом – нет.

**Определение.** События называются **несовместными**, если появление одного из них исключает появление других.

Классическим примером несовместных событий является результат подбрасывания монеты – выпадение лицевой стороны монеты исключает выпадение обратной стороны (в одном и том же опыте).

**Определение. Полной группой событий** называется совокупность всех возможных результатов опыта.

**Определение. Достоверным событием**называется событие, которое наверняка произойдет в результате опыта. Событие называется **невозможным**, если оно никогда не произойдет в результате опыта.

Например, если из коробки, содержащей только красные и зеленые шары, наугад вынимают один шар, то появление среди вынутых шаров белого – невозможное событие. Появление красного и появление зеленого шаров образуют полную группу событий.

**Определение.** События называются **равновозможными**, если нет оснований считать, что одно из них появится в результате опыта с большей вероятностью.

В приведенном выше примере появление красного и зеленого шаров – равновозможные события, если в коробке находится одинаковое количество красных и зеленых шаров.Если же в коробке красных шаров больше, чем зеленых, то появление зеленого шара – событие менее вероятное, чем появление красного. Исходя из этих общих понятий можно дать определение вероятности.

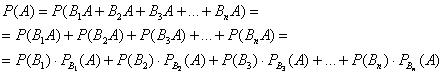
Рассмотрим [**зависимое событие**](http://www.mathprofi.ru/zavisimye_sobytija.html) , которое может произойти лишь в результате осуществления одной из несовместных ***гипотез*** , которые образуют [**полную группу**](http://www.mathprofi.ru/teorija_verojatnostei.html). Пусть известны их вероятности  и соответствующие условные вероятности . Тогда вероятность наступления события  равна:



Эта формула получила название **формулы полной вероятности**. В учебниках она формулируется теоремой, доказательство которой элементарно: согласно [**алгебре событий**](http://www.mathprofi.ru/teorija_verojatnostei.html),  *(произошло событие****и****после него наступило событие****или****произошло событие****и****после него наступило событие****или****произошло событие****и****после него наступило событие****или****….****или****произошло событие****и****после него наступило событие )*. Поскольку гипотезы  несовместны, а событие  – зависимо, то по [**теореме сложения вероятностей несовместных событий**](http://www.mathprofi.ru/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei.html) *(первый шаг)* и [**теореме умножения вероятностей зависимых событий**](http://www.mathprofi.ru/zavisimye_sobytija.html) *(второй шаг)*:



Задача 1



Имеются три одинаковые урны. В первой урне находятся 4 белых и 7 черных шаров, во второй – только белые и в третьей – только черные шары. Наудачу выбирается одна урна и из неё наугад извлекается шар. Какова вероятность того, что этот шар чёрный?

**Решение**: рассмотрим событие  – из наугад выбранной урны будет извлечён чёрный шар.  Данное событие может произойти в результате осуществления одной из следующих гипотез:  
 – будет выбрана 1-я урна;  
 – будет выбрана 2-я урна;  
 – будет выбрана 3-я урна.



Так как урна выбирается наугад, то выбор любой из трёх урн **[равновозможен](http://www.mathprofi.ru/teorija_verojatnostei.html)**, следовательно:



Обратите внимание, что перечисленные гипотезы образуют [**полную группу событий**](http://www.mathprofi.ru/teorija_verojatnostei.html), то есть по условию чёрный шар может появиться только из этих урн, а например, не прилететь с бильярдного стола. Проведём простую промежуточную проверку:  
, ОК, едем дальше:



В первой урне 4 белых + 7 черных = 11 шаров, по [**классическому определению**](http://www.mathprofi.ru/zadachi_na_klassicheskoe_opredelenie_verojatnosti_primery_reshenij.html):  
 – вероятность извлечения чёрного шара **при условии**, что будет выбрана



1-я урна.

Во второй урне только белые шары, поэтому **в случае её выбора** появления чёрного шара становится *невозможным*: .



И, наконец, в третьей урне одни чёрные шары, а значит, соответствующая [**условная вероятность**](http://www.mathprofi.ru/zavisimye_sobytija.html) извлечения чёрного шара составит  *(событие достоверно)*.



По формуле полной вероятности:  
  
 – вероятность того, что из наугад выбранной урны будет извлечен чёрный шар.



**Ответ**:



Разобранный пример снова наводит на мысль о том, как важно ВНИКАТЬ В УСЛОВИЕ. Возьмём те же задачи с урнами и шарами – при их внешней схожести способы решения могут быть совершенно разными: где-то требуется применить только [**классическое определение вероятности**](http://www.mathprofi.ru/zadachi_na_klassicheskoe_opredelenie_verojatnosti_primery_reshenij.html), где-то события [**независимы**](http://www.mathprofi.ru/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei.html), где-то [**зависимы**](http://www.mathprofi.ru/zavisimye_sobytija.html), а где-то речь о гипотезах. При этом не существует чёткого формального критерия для выбора пути решения – над ним почти всегда нужно думать.

Задача 2

В тире имеются 5 различных по точности боя винтовок. Вероятности попада­ния в мишень для данного стрелка соответственно равны 0,5; 0,55; 0,7; 0,75 и 0,4. Чему равна вероятность попадания в мишень, если стрелок делает один выстрел из слу­чайно выбранной винтовки?

Краткое решение и ответ в конце.

В большинстве тематических задач гипотезы, конечно же, не равновероятны:

Задача 3

В пирамиде 5 винтовок, три из которых снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,7. Найти вероятность того, что мишень будет поражена, если стрелок производит один выстрел из наудачу взятой винтовки.

**Решение**: в этой задаче количество винтовок точно такое же, как и в предыдущей, но вот гипотезы всего две:  
 – стрелок выберет винтовку с оптическим прицелом;  
 – стрелок выберет винтовку без оптического прицела.  
По [**классическому определению вероятности**](http://www.mathprofi.ru/zadachi_na_klassicheskoe_opredelenie_verojatnosti_primery_reshenij.html): .  
Контроль:



Рассмотрим событие:  – стрелок поразит мишень из наугад взятой винтовки.  
По условию: .



По формуле полной вероятности:



**Ответ**: 0,85

На практике вполне допустим укороченный способ оформления задачи, который вам тоже хорошо знаком:

**Решение**: по классическому определению:   – вероятности  выбора винтовки с оптическим и без оптического прицела соответственно.



По условию,  – вероятности попадания в мишень из соответствующих типов винтовок.



По формуле полной вероятности:  
 – вероятность того, что стрелок поразит мишень из наугад выбранной винтовки.



**Ответ**: 0,85

Следующая задача для самостоятельного решения:

Задача 4

Двигатель работает в трёх режимах: нормальном, форсированном и на холостом ходу. В режиме холостого хода вероятность его выхода из строя равна 0,05, при нормальном режиме работы – 0,1, а при форсированном – 0,7. 70% времени двигатель работает в нормальном режиме, а 20% – в форсированном. Какова вероятность выхода из строя двигателя во время работы?

На всякий случай напомню – чтобы получить значения вероятностей проценты нужно разделить на 100.

**Задачи на формулы Байеса**

Материал тесно связан с содержанием предыдущего параграфа. Пусть событие  наступило в результате осуществления одной из гипотез .  Как определить вероятность того, что имела место та или иная гипотеза?



**При условии**, что событие  **уже произошло**, вероятности гипотез *переоцениваются* по формулам, которые получили фамилию английского священника Томаса Байеса:



 – вероятность того, что имела место гипотеза ;  
 – вероятность того, что имела место гипотеза ;  
 – вероятность того, что имела место гипотеза ;  
…  
 – вероятность того, что имела место гипотеза .



На первый взгляд кажется полной нелепицей – зачем пересчитывать вероятности гипотез, если они и так известны? Но на самом деле разница есть:

 – это *априорные* (оцененные **до** испытания) вероятности.



 – это *апостериорные* (оцененные **после** испытания) вероятности тех же гипотез, пересчитанные в связи «со вновь открывшимися обстоятельствами » – с учётом того факта, что событие  **достоверно произошло**.



Рассмотрим это различие на конкретном примере:

Задача 5

На склад поступило 2 партии изделий: первая – 4000 штук, вторая – 6000 штук. Средний процент нестандартных изделий в первой партии составляет 20%, а во второй – 10%. Наудачу взятое со склада изделие оказалось стандартным. Найти вероятность того, что оно: а) из первой партии, б) из второй партии.

Первая часть **решения** состоит в использовании формулы полной вероятности. Иными словами, вычисления проводятся в предположении, что испытание ещё не произведено и событие *«изделие оказалось стандартным»* пока не наступило.

Рассмотрим две гипотезы:  
 – наудачу взятое изделие будет из 1-й партии;  
 – наудачу взятое изделие будет из 2-й партии.



Всего: 4000 + 6000 = 10000 изделий на складе. По [**классическому определению**](http://www.mathprofi.ru/zadachi_na_klassicheskoe_opredelenie_verojatnosti_primery_reshenij.html):  
.



Контроль:



Рассмотрим зависимое событие:  – наудачу взятое со склада изделие будет стандартным.



В первой партии 100% – 20% = 80% стандартных изделий, поэтому:  – вероятность того, что наудачу взятое на складе изделие будет стандартным **при условии**, что оно принадлежит 1-й партии.



Аналогично, во второй партии 100% – 10% = 90% стандартных изделий и  – вероятность того, что наудачу взятое на складе изделие будет стандартным **при условии**, что оно принадлежит 2-й партии.



По формуле полной вероятности:  
 – вероятность того, что наудачу взятое на складе изделие будет стандартным.



Часть вторая. Пусть наудачу взятое со склада изделие оказалось стандартным. Эта фраза прямо прописана в условии, и она констатирует тот факт, что событие  **произошло**.



По формулам Байеса:

а)  – вероятность того, что выбранное стандартное изделие принадлежит 1-й партии;



б)  – вероятность того, что выбранное стандартное изделие принадлежит 2-й партии.



После *переоценки* гипотезы , разумеется, по-прежнему образуют [**полную группу**](http://www.mathprofi.ru/teorija_verojatnostei.html):  
 *(проверка ;-))*



**Ответ**:



Задача 6

На склад поступило 2 партии изделий: первая – 4000 штук, вторая – 6000 штук. Средний процент нестандартных изделий в первой партии 20%, во второй – 10%. Наудачу взятое со склада изделие оказалось **не**стандартным. Найти вероятность того, что оно: а) из первой партии, б) из второй партии.

Задача 7

Электролампы изготавливаются на трех заводах. 1-й завод производит 30% общего количества ламп, 2-й – 55%, а 3-й – остальную часть. Продукция 1-го завода содержит 1% бракованных ламп, 2-го – 1,5%, 3-го – 2%. В магазин поступает продукция всех трех заводов. Купленная лампа оказалась с браком. Какова вероятность того, что она произведена 2-м заводом?

Задача 8

В студенческой группе 3 человека имеют высокий уровень подготовки, 19 человек – средний и 3 – низкий. Вероятности успешной сдачи экзамена для данных студентов соответственно равны: 0,95; 0,7 и 0,4. Известно, что некоторый студент сдал экзамен. Какова вероятность того, что:

а) он был подготовлен очень хорошо;  
б) был подготовлен средне;  
в) был подготовлен плохо.

Задача 9

Три цеха завода производят однотипные детали, которые поступают на сборку в общий контейнер. Известно, что первый цех производит в 2 раза больше деталей, чем второй цех, и в 4 раза больше третьего цеха. В первом цехе брак составляет 12%, во втором – 8%, в третьем – 4%. Для контроля из контейнера берется одна деталь. Какова вероятность того, что она окажется бракованной? Какова вероятность того, что извлечённую бракованную деталь выпустил 3-й цех?